教育学研究科における数学の研究 : 直観幾何学的観点から (数学教師に必要な数学能力形成に関する研究)

伊藤, 仁一

数理解析研究所講究録
第 1657 巻 2009 年 157-176

教育学研究科における数学の研究
−直観幾何学的観点から−

熊本大学教育学部　伊藤 仁一 (Jin-ichi Itoh)
Faculty of Education, Kumamoto University

1. はじめに

日本数学会の雑誌「数学」に修士論文のタイトルが掲載されるようになって，２０年ぐらいになるかと思います．その全てを調べたわけではありませんが，教育学研究科における修士論文は，だいたい２種類に分かれます．数学の学術的研究にかかわるもの（そのなかで多くは総合報告的な内容）と数学教育に関わるもの（特に最近では数学教育学と言われているような内容）とです．

教育学研究科の院生にとって，数学の先端研究において学術的にオリジナリティーのある修士論文を書くことは，難しくなっていると言ってよいでしょう．勿論，総合報告的な内容でも何ら問題があるわけではないのですが，一般の人から極めて難しくなってしまった数学の先端研究の総合報告を書くことに，今後先生となっていく学生たち（大学院生）にどれほどの意味があるのだろうかと考えたとき，少し疑問を感じますし，大学院生からもそのような意見を聞くことがあります．

私自身，やはり数学をしていて一番面白いと思ったのは，自分の結果といえるもの，誰も知っていないことを見つけたとか，証明したとか思えたときでしたし，多くの数学者もそうではないでしょうか？

先生になっていく人たちにもその最も面白いと思えるところを，経験してもらうことが一番良いことだと思いますし，数学の面白さや素晴らしさをより多くの人に広めることに役立つものと考えます．

そこで，何かもっと中学校や高等学校での内容とも関連するところで，数学研究の内容がないものかと思うようになりましたし，また，理学部ではなく教育学部を卒業して教育学研究科に入学した学生たちの数学的素養でも何かオリジナルな結果が出せるような数学研究の分野を開拓出来ないものかと考えるようになりました．

私自身が，微分幾何（特に測地線論）や位相幾何（力学系のみですが）を最初に学び，教育学部に転任する少し前から多面体を微分幾何的に見

ることや，初等幾何的な内容の研究に興味を持っていたことから，凸体の幾何とか離散幾何というような分野の研究に関わるようになってきました．そこで，最近では直観幾何学とでも言えるような領域を模索出来ないものかと思い始めています．

勿論，直観幾何学とは，ヒルベルトとコーン・フォッセンの本のタイトルとして最初に使われたのだと思いますが，この本は，解析幾何，組合せ幾何，微分幾何，位相幾何等の幾何学の非常に多くの分野をバランスよくカバーし，図や写真を多用することによって直観的な理解を助けるように意図された，とてもよくできた本です．また，ハンガリーでは L. Fejes Toth がドイツでその本で学んだことから，Intuitive Geometry という名前の研究会が定期的に現在でも続けられています．そのオーガナイザーによると Intuitive Geometry とは，そのような幾何学の分野は AMS の分類にはないが,「道行く人にも（問題の内容を）説明できる幾何学である」というのが，その定義であると聞いたことがあります．おそらく，ヒルベルト自身もそのようなことを言ったというようなことを聞いたこともあります．ただ，ハンガリーでの研究会は，組合せ幾何や凸体の幾何が中心となってしまっているのは事実です．

多くの幾何学の初等的な部分にも，未だに新しいことを発見することが可能であることを示し，僭越ですが，それらを総称して「直観幾何学」と呼べるような研究分野になったらいいなあと思っています．

また，昨年，熊本大学教育学部を退官された青山寛六先生が，今月の問題として毎月何らかのクイズ的な数学の問題を出されていましたので，それを引き継ぐ意味もあって，昨年４月から「図形パズルから未解決問題へ」というタイトルで，月１回程度で，Ａ４用紙１枚にまとめた問題を作ってきました．そこでそれが１０回分あるので，それをもとに少し手直ししたものをそれを 2 節から 11 節に掲載します．尚，9 節と 10 節は，今年度の熊本大学教育学研究科の修士論文の内容に関連するものとなっています．また，2 節は 7 年前の熊本大学教育学研究科の修士論文とも関連する内容となっています．

これらの未解決問題としている部分は，学術論文としても十分可能なものでしょうし，誰もがほとんど予備知識なしで，チャレンジできるかどうかはともかく，問題の意味を理解することは容易にできるものと思います．

2. 最遠点

パズル的な問題 1. 三角形の板の上の点 P から最も遠い点はどこでしょう？

三角形の板には裏表があり，表側からは辺で折り返して裏側に行けるものとします．鋭角三角形で点 P をその外心としたときに最も遠い点は丁度 4 点あります．

立方体の表面で，辺の中点から最も遠い点は 2 点（対称の辺の 3 等分点）あり，辺の中点はどの点からも最も遠い点になりません．また，直方体（辺の比が 1 ： 1 ： 2）の表面で考えると頂点から最も遠い点は点対称の頂点ではなく，頂点はどの点からも最も遠い点にはなりません．

パズル的な問題 2. 直方体（辺の比が 1 ： 1 ： 2）の表面で頂点から最も遠い点はどこでしょう？

直方体の頂点の周りの角度の総和は $3\pi/2$ です．直感的にもっと尖っている頂点だったら，どこかの点の最も遠い点になりそうに思いませんか？

論文になった問題 1. 凸多面体の表面で，その周りの角度の総和が π 以下の頂点は，どこかの点の最も遠い点になることを示して下さい．

全ての点に対して最も遠い点が 1 点となり，最も遠い点の最も遠い点が元の点になるような凸曲面はあるでしょうか？

勿論，球面はそうです．では球面だけでしょうか？(これは H. Steinhaus の問題として知られています.)

論文になった問題 2. 球面以外に上の性質を満たす図形を見つけてください．

ある種の線対称な曲線を母線とする回転面がそのような性質をもつことが示されています ([6]).

未解決問題 最も遠い点に関する上の条件に更に何か良い条件を見つけて球面を特長付けて下さい．(球面だけが満たす良い条件を最も遠い点の性質だけを使って作って下さい.)

(少し簡単な) 未解決問題 裏表を考えた凸領域で上の条件を満たすものは円板だけであることを示して下さい．(幅が一定となることは分かっています．また，点対称という条件をつければ正しいことも分かっています ([3]).)

参考文献

[1] H. T. Croft, K. J. Falconer & R. K. Guy, *Unsolved Problems in Geometry*, Springer-Verlag, New York, 1991.

[2] J. Itoh & C. Vîlcu, *Farthest points and cut loci on some degenerate convex surfaces*, J. Geom. **80** (2004), 106–120.

[3] J. Itoh J. Rouyer & C. Vîlcu, *Antipodal convex hypersurfaces*, to appear Indagationes Math.

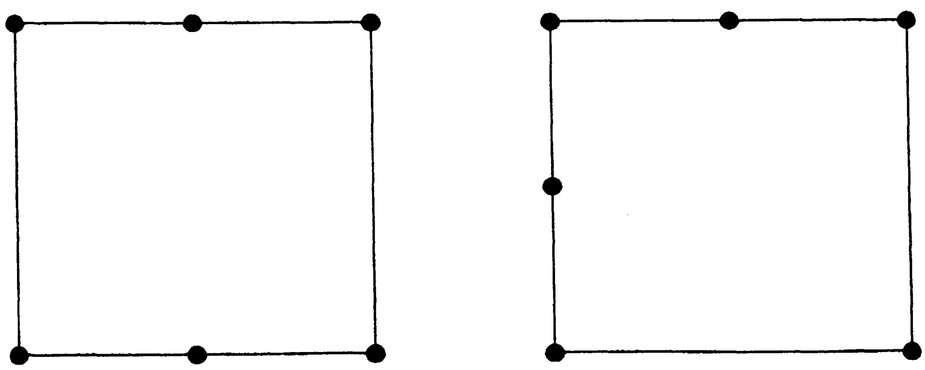
[4] J. Itoh & C. Vîlcu, *Criteria for farthest points on convex surfaces*, to appear Math. Nachrichten.

[5] K. Ieiri, J. Itoh & C. Vîlcu, *Quasigeodesics and farthest points on convex surfaces*, preprint.

[6] C. Vîlcu, *On two conjectures of Steinhaus*, Geom. Dedicata **79** (2000), 267-275.

3. 鋭角三角形分割

パズル的な問題 1. 正方形を鋭角三角形に分割して下さい．ただし境界の頂点は下図のように与えられた6点のみ(左図の場合は新たな２つの頂点は向かい合う２辺の中点とし，右図の場合は新たな２つの頂点は隣り合う２辺の中点）とします．



左図の場合は正方形を８個の鋭角三角形に分割出来ます．正方形の最

小個数の鋭角三角形分割になります．右図の場合は 10 個の鋭角三角形に分割出来ます．

パズル的な問題 2． 正方形をその境界に 3 個の新しい頂点を持つようにして鋭角三角形に分割して下さい．また，1 辺のみに新しい頂点を持つように鋭角三角形に分割して下さい．

有限個の三角形に分割されていて，どの 2 つの三角形の共通部分も，(i) 空集合か，(ii) 1 つの共通の頂点か，(iii) 共通の 1 辺となるときに数学では三角形分割と言います．また，与えられた 3 つの頂点を 3 つの最短線で結んだ図形を三角形と言い，全ての内角が $\pi/2$ 未満の鋭角三角形で三角形分割されるとき，鋭角三角形分割と言いましょう．正方形の表面は，2 つの隣り合う正方形の面を長方形とみなして，8 個に鋭角三角形に分けることが出来るので，正方形の表面を 24 個の鋭角三角形に三角形分割することが出来ます．

論文になった問題 1． 立方体の表面は 24 個未満の鋭角三角形に三角形分割出来ないことを示して下さい．

論文になった問題 2． 立方体の表面をその辺が全て三角形の辺となるように，鋭角三角形分割するとき，その三角形の最小個数を求めて下さい．

これは，上の正方形の 2 種類の鋭角三角形分割を使って，56 個の鋭角三角形に分割出来，それが最少個数です ([6])．

未解決問題 任意の凸多面体を辺を全て辺として用いて鋭角三角形分割可能であることを示して下さい．

全ての辺を使わなくてもよい場合（上の立方体の表面を 24 個の鋭角三角形に分割するような場合）には，Y. Burago と V. Zalgaller によって鋭角三角形分割されることは証明されています．また，その個数を評価する問題も興味深いものとして残されています．

簡単な未解決問題 正十二面体を 12 個の三角形に鋭角三角形分割出来るかどうかを決定して下さい．

11 個以下に鋭角三角形分割出来ないことは分かっています．また，14 個の鋭角三角形分割も知られています．奇数個に三角形分割出来ないことは簡単に証明出来ますので，13 個には分割出来ません．従って，12 個の場合だけが未だに分かっていません ([5])．

参考文献

[1] Y. D. Burago, V. A. Zalgaller, *Polyhedral embedding*, Vestnik Leningrad. Univ., of a net (Russian), **15** (1960), 66–80.

[2] M. Gardner, *Mathematical games, The games and puzzles of Lewis Carroll, and the answers to February's problems*, Scientific American, **202(3)** (1960), 172–182.

[3] T. Hangan, J. Itoh and T. Zamfirescu, *Acute triangulations*, Bull. Math. Soc. Sci. Math. Roumanie, **43 (91)** (2000), 279–285.

[4] J. Itoh, T. Zamfirescu, *Acute triangulations of the regular icosahedral surface*, Discrete Comput. Geom., **31** (2004), 197–206.

[5] J. Itoh, T. Zamfirescu, *Acute triangulations of the regular dodecahedral surface*, Europian J. of Combinatorics, 28 (2007), 1072–1086.

[6] J. Itoh, H. Maehara, *On triangulations of the surface of a cube into planar acute triangles*, Ryukyu Math. J., **21** (2008), 15-22.

4. 正四面体の通る穴

パズル的な問題 1. 同じ大きさの２つの立方体の片方に穴を空けて，もう一方の正方形をその穴を通すことが出来ますか？

これは 17 世紀に Rupert 王子が賭けをした問題として知られています.

パズル的な問題 2. 1 辺の長さが 1 の正四面体を平面に空けた直径が 0.9 の円形の穴を通すことが出来ますか？

勿論，面の正三角形に外接する直径 $2/\sqrt{3}$ の円なら通ることは当然ですし，正三角形の高さ $\sqrt{3}/2$ を直径とする円は通れないことも当然です.

論文になった問題 1. 平面に正三角形の穴を空けて 1 辺の長さが 1 の正四面体を通すことが出来る穴の正三角形の 1 辺の長さの最小値を決めて下さい.（1 より小さくなります. 従って，同じ大きさの２つの正四面体の片方に穴をあけて，もう一方をその穴を通すことが出来ます.）

ごく最近，穴の正三角形の 1 辺の長さの最小の値は $(1+\sqrt{2}/\sqrt{6} \approx 0.9856...$ となることが証明されました ([4]).

論文になった問題 2. 平面上の円形の穴で，1 辺が 1 の正四面体及びそれ以外の正多面体が通り抜けることが出来る最小の直径を決定して下さい．また，正方形の穴とするとどのようになりますか？

円形の穴の最小直径は，

$$t_0 = \frac{2 + \sqrt[3]{\sqrt{43} - 4} - \sqrt[3]{\sqrt{43} + 4}}{3}$$

とおくと，

$$\frac{t_0^2 - t_0 + 1}{\sqrt{\frac{3}{4}t_0^2 - t_0 + 1}} = 0.8957...,$$

となることが知られています．また，正方形は対角線の長さが 1 となるものが最小となることが知られています ([2]).

論文になった問題 3. 1 辺が 1 の正四面体が通り抜けることが出来る平面に空いた穴で，その幅も直径も最小となる穴を求めて下さい．

ここで，穴の直径とは穴の境界上の 2 点間の距離の最大値のことをいい，幅とは平行線で挟まれる時の平行線間の距離の最小値のことです．上の問題で，正四面体の場合には，面の正三角形の幅が $\sqrt{3}/2$ であるので，穴の最小の直径はそれ以上である必要があり，また，正四面体の幅（挟む平行な平面間の最小距離）が $\sqrt{2}/2$ であるので，穴の幅もそれ以上必要なことは容易に分かり，この場合は論文になっていますが ([3])，他の正多面体の場合には，まだ分かっていません．

未解決問題 1. 1 辺が 1 の正四面体が通り抜けることが出来る穴で，面積が最少になる穴の形を求めて下さい．更に，一般次元の場合はどのようになりますか？

未解決問題 2. 1 辺が 1 の n 次元単体が通り抜けることが出来る超平面に空いた穴で，その幅も直径も最小となる穴を求めて下さい．

ここでもう一度，Rupert 王子の問題に戻って，立方体と正四面体に関しては，2 つの同じ立体に対して一方に穴を空ける他方を通すことが出来ます．多分，多くの多面体に対してこのことは成り立つものと思われます．しかし，円や円柱に関しては，明らかに成り立ちません．そこで，次のような問題が生じます．

未解決問題 3. Rupert 王子の問題のような性質（2 つの同じ凸体があるとき一方に穴を空けて他方を通すことが出来る）を持つような凸体を，

（その直径，幅，含まれる円柱の最小半径等の幾何学的な量を用いて）特長付けることが可能でしょうか？

参考文献

[1] R. Jerrard, J. Wetzel, *Prince Rupert's rectangle*, Amer. Math. Monthly, **111** (2004), 22-31.

[2] J. Itoh, Y. Tanoue, T. Zamfirescu, *Tetrahedra passing through a circular or square hole*, Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo, Suppl. **77** (2006), 349-354.

[3] J. Itoh, T. Zamfirescu, *Simplicies passing through a hole*, J. of Geometry, **83** (2005), 65-70.

[4] H. Maehara, N. Tokushige, *A regular tetrahedron passes through a hole smaller than its face*, preprint.

5. 糸による構成

楕円を，糸の長さを楕円の長径とし両端を楕円の焦点に固定して鉛筆を引っ掛けて糸をピンと張って描けることはよく知られています．これは，長さが長径と一致する閉じた糸（輪になっている）を使っても，2つの焦点と鉛筆とでピンと張って三角形にして同じように描くことが出来ます．

パズル的な問題 1. 双曲線の一部（正確には焦点を共有しているある楕円の内部）を上のような閉じた糸を使って描くことが出来ますか？一つの針金で出来ている楕円を固定してそれに引っ掛けることも可能とします．

双曲線は，2つの焦点からの距離の差が一定な点の集まりとみなすことが出来ます．

パズル的な問題 2. 同じことを放物線に対しても出来ることを示して下さい．準線の直交方向はどの点でも分かるものとします．

放物線は準線と言われる直線と焦点と言われる一つの点からの距離が等しい点の集まりとみなすことが出来ます．

論文になった問題 1. 楕円面をその焦曲線（xy-平面上にある楕円と xz-平面上にある双曲線で互いの相手の x-軸上の焦点を通る）が針金で出来ているとして，それに糸を掛けることによって（その 4 分の 1 が）構成出来ることを示して下さい．他の部分も糸の掛け方を変えれば他の部分も構成出来ます．

これは，1882 年に O. Staude によって発見されました ([3])．

空間の一般点 P を固定し，P から楕円 E の点 C を通って E の焦点 O に至る折れ線の，C を動かした時の長さの最小及び最大となる点を各々 C_1, C_2 とし，その長さを r_1, r_2 とします．もう一つの焦点についても同様に C_1', C_2', r_1', r_2' を決める．この時，4 つの直線 PC_i, PC_i' $(i = 1, 2)$ は同時に焦双曲線とも交わることが分かります．(一点 P を通るこのような直線は 4 本しかないことも直に分かります.)

論文になった問題 2. 上記の時に，$r_1 + r_2 =$ 一定となる P の軌跡は楕円面，$r_2' - r_1 =$ 一定となる P の軌跡は一葉双曲面，$r_1' - r_1 =$ 一定となる P の軌跡は二葉双曲面となることを示して下さい．

点 P の 3 つの楕円座標が r_i, r_i' $(i = 1, 2)$ を使って表すことが出来ることができます ([4])．

未解決問題 1. 上記の問題を一般次元の 2 次曲面や放物面の場合に拡張して下さい．

関連する未解決問題 2. 楕円 E の形のビリヤード台のある点 P を取ります．P を通る E と同じ焦点を持つ楕円 E_P の P での接線に対して対称の方向に 2 つのボールを同じ速さで P から打ち出すとします．このとき，2 つのボールは E_P 上で衝突することを初等的方法で示して下さい．

楕円面のときの測地線の挙動を楕円関数を用いて一般的に考察して，その退化した場合とみなせば正しいことが分かりますが ([1])，平面の場合は初等的な方法のみで示すことが出来るかどうか分かっていません．

参考文献

[1] J. Itoh, K. Kiyohara, *The cut loci and the conjugate loci on ellipsoids*, Manuscripta Math., **114** (2004), 247–264.

[2] D. Hilbert, S. Cohn-Vossen *Anschauliche Geometrie*, Springer, Berlin 1932. 訳本「直観幾何学」みすず書房.

[3] O. Staude *Über Fadenconstruction des Ellipsoides*, Math. Annalen, **20** (1882), 147-184.

[4] O. Staude *Über neue Focaleigenschaften der Flächen 2. Grades*, Math. Annalen, **27** (1886), 253-271.

6. 多角形の等直径問題

多角形で最も長い 2 点間の距離をその直径と言います.

パズル的な問題 1. 直径が 1 の四辺形のなかで面積が最大になるのはどのような四辺形でしょうか?(正方形だけではありません.)

勿論, 最大の面積は 1/2 で, 対角線の長さが 1 の正方形もその一つの例となります.

パズル的な問題 2. 直径が 1 の四辺形のなかで周の長さが最長になるのはどのような四辺形でしょうか?(正方形ではありません.)

正三角形の各頂点から辺の長さを半径とする 3 つの円を描きその共通部分をリューロー (Reuleaux) の三角形といいます. どの傾きの平行線ではさんでもその幅が 1 になってる図形として有名です. 上の問題の答えはこのリューローの三角形から作られます.

パズル的な問題 3. 直径が 1 の六角形のなかでもっとも周が長くなるものはどのような六角形でしょうか?

勿論, 正六角形ではありません. この問題は完全に証明を与えるには難し過ぎるかもしれませんが, どのような六角形になるかを想像して楽しんでみてください (これもリューローの三角形から作られます).

論文になった問題 1. 直径が 1 の六角形で最も面積が大きくなる六角形はどのような六角形でしょうか?直径が 1 の八角形で最も面積が大きくなる八角形はどのような八角形でしょうか?

直径が 1 の奇数角形で面積が最も大きいものは正奇数角形であり, 最長の周の長さをもつのも正奇数角形であることは, 1927 年に Reinhardt によって示されました ([5]). 面積最大の六角形は有名は Graham によって [3] で, 八角形は [1] で発見されました.

論文になった問題 2. 直径が 1 の n 角形で $n \neq 2^s$ $(s \geq 3)$ のときに周

の長さが最っとも長くなる n 角形を決定し下さい.

この問題の答えは，ある種の Diophantus 方程式の整数解と関連していて，数学の奥深さが感じられます ([2]).

未解決問題 直径が 1 の $2s(s \geq 3)$ 角形で周の長さが最も長くなる n 角形を決定し下さい．直径が 1 の八角形で周が最も長くなるものも分かっていません.

八角形の場合で，周の長さが長くなりそうな候補として，リューローの三角形から 2 種類のものが考えられます．また，リューローの五角形 (対角線が 1 の正五角形から円弧を用いて三角形のときと同様に作ったもの) を用いて出来る八角形もあります．これら 3 つのうちで，どれが周の長さが一番長くなるかを調べてみるだけでも面白いように思えます.

未解決問題 直径が 1 の $2m(m \geq 5)$ 角形で面積が最大となるものを決定して下さい.

参考文献

[1] C. Audet, P. Hansen, F. Messine & J. Xiong, *The largest small octagon*, J Comb. Theory Ser.A, **98** (2002), 46-59.

[2] B. Datta, *A discrete isoperimetric problems*, Geom. Dedicata **64** (1997), 55-68.

[3] R. Graham, *The largest small hexagon*, J Comb. Theory Ser.A, **18** (1975), 165-170.

[4] M. Mossinghoff, *A $1 problem*, Amer. Math. Monthly, **113** (2006), 385-402.

[5] K. Reinhardt, *Extremale Polygone gegebene Durchmessers*, Jahresber. Deutsch. Math-Verein **31** (1922), 251-270.

7. Fermat の問題の一般化

パズル的な問題 1. 与えられた 3 点からの距離の和が最も小さくなる点を求めて下さい．また 3 点が鋭角三角形を作るときには作図（定規とコンパス）で求める方法も示して下さい.

これは Fermat の問題として有名なものです.

パズル的な問題 2. 平面上の与えられた 4 点からの距離の和が最も小さくなる点を求めて下さい.

与えられた 4 点が凸 4 角形となるときと, 1 点が他の 3 点が作る三角形に含まれるときとは別々に議論する必要があります.

一般に与えられた n 点からの距離の和が最小になる点を Fermat 点と呼ぶことにします.

論文になった問題 1. 平面の与えられた 5 点に関して, その Fermat 点が作図では求められない例がある.

論文になった問題 2. Hadamard 空間という非正曲率で単連結な空間に n 点が与えられたとき, その Fermat 点の存在を示して下さい. そのような点がただ 1 点に決まるかどうかは n 点の与えられ方によります.

簡単な未解決問題. 空間の 4 点に対して Fermat 点を具体的に求める方法を示して下さい.

未解決問題 1. 平面の与えられた n 点を結ぶグラフで辺の長さの総和が最小となるものを決定して下さい. (n に関する多項式オーダーで求めることが出来るアルゴリズムがあるでしょうか?) これは Steiner の問題といって, このようなグラフ (この場合 "木" と呼ばれるサイクルを含まない) の分岐点はすべて, 3 点の Fermat の問題の求める点の周りと同じ状況になることは, 勿論, 知られています.

これは Steiner の問題とも言われ, ネットワークを考える上で, 基本的かつ重要な問題です.

未解決問題 2. 空間の与えられた 4 点を結ぶネットワークで辺の長さの総和が最短のものを決定して下さい.

空間の Steiner の問題に関してはまだほとんど何も知られていません ([3] を参照).

参考文献

[1] St. Mehlhos, *Simple counter examples for the unsolvability of the Fermat- and Steiner-Weber-Problem by compass and ruler*, Beiträge zur Algebra and Geometrie **41** (2000), 151-158.

[2] R. Noda, T. Sakai and M. Morimoto, *Generalized Fermat's problem*, Canad. Math. Bull. **34** (1991), 96-104.

[3] H. Rubinstein, A. Thomas and J. Weng, *Minimum networks for four points in space*, Geom. Dedicata **93** (2002), 57-70.

8. 多面体の展開

パズル的な問題 1. 立方体をその辺のみを切り開いて作る展開図は何種類ありますか？

これは小学生に出すことも出来る問題ですし，いろいろなところで見ることもあります．ただ，どれとどれを同じ展開図とみなすかに注意して下さい．

パズル的な問題 2. 立方体を切り開いて（辺に沿って切る必要はないものとします）展開するとき，その展開図の周の長さを最小にするにはどのように切ればよいでしょうか？

この問題は全ての正多面体の場合には分かっていて，論文にもなっています ([1]).

論文になった問題 1. 一般の多面体を切り開いて平面に重なり合うことがないように（平面）多角形に展開する方法を示して下さい．

これには，star unfolding（星状展開）と source unfolding と呼ばれる２種類の方法が知られています．前者は，固定した任意の点とすべての頂点とを結ぶ最短線に沿って切り開くもので，後者は，面の内部に固定した点の最小跡といわれる集合（固定した点から出る測地線が最短線でなくなる点集合）は，線分からなるグラフになっていて，それに沿って切り開くものです.（ここ（凸多面体の表面）では，測地線は局所的に常に最短線となっている線分の集まり，即ち，一つの面の上では線分で，辺を横断する時にはその辺の両側の面を平面に開けば直線の一部に，そして，頂点を通ることがない折れ線と言うことが出来ます.）

後者の方は最小跡の定義が複雑で少し難しいかもしれませんが，重ならないように展開出来ることはほとんど明らかです．前者の方は，展開の仕方は簡単ですが，重ならないように展開出来るかどうかについては，かなり込み入った証明が [2] で与えられています．この証明を簡略化出来ればそれも十分に価値のある論文となります．

以後，重ならない平面多角形に展開することを単に展開すると言うことにします．

論文になりそうな問題 2. 閉じた擬測地線を用いて上記の２種類の展開方法がいつも可能であることを示して下さい．

実は，多くの凸多面体の表面には閉じた測地線はないことが知られていますが，閉じた擬測地線は必ず存在することが知られています．測地線は頂点を通ることが出来ませんが，擬測地線は頂点を通り抜ける時にはそのどちら側も頂点での内角の和が π 以下となるという条件をつけたものと思うことが出来ます．

閉じた擬測地線と各頂点（擬測地線上にない）との最短線に沿って切り開く方法が擬測地線を用いた star unfolding ([4]) で，閉じた擬測地線からの最小跡に沿って切り開く方法が擬測地線を用いた source unfolding ですが，これに関してもごく最近概ね証明されたと言ってよいでしょう．

未解決問題 1. 任意の多面体を辺のみで切り開いて展開することが出来るか？

未解決問題 2. 多面体の一つの面とそれ以外の頂点を結ぶ最短線で切り開いて展開することが出来るか？

参考文献

[1] J. Akiyama, X. Chen, G. Nakamura & M. Ruiz, *The minimum perimeter developments of the Platonic solids*, Preprint.

[2] B. Aronov & J. O'Rourke, *Nonoverlap of the star unfolding*, Discrete Comput. Geom. **8** (1992), 219-250.

[3] E. Demaine & J. O'Rourke, *Geometric Folding Algorithms: Linkages, Origami, Polyhedra*, Cambridge U.P., 2007.

[4] J. Itoh, J. O'Rourke & C. Vîlcu, *Unfolding convex polyhedra via quasi-geodesics*, Technical Report 085, Smith Colledge, 2007.

9. 多面体の等直径問題

多面体表面の２点間に対して，その距離を空間内で結ぶ線分の長さと考えたとき，最も長い２点間の距離を直径といいます．直径が１の多角形に対して，その面積や周の長さが最大となるものは，全ては分かって

いないことを以前述べましたが，今回は多面体でそのアナロジーを考えてみましょう．

パズル的な問題 1. 直径が1の4面体のうちで体積，表面積，辺の長さの総和が最大となるものは何でしょうか？

勿論，答えは1辺の長さが1の正四面体ですが，5面体の場合に同じ問題を考えるとすでに難しい問題となってしまいます．ここで，5面体には組み合わせ的に2つの種類があって，3角形の面4個と4角形の面1個のものをタイプ1，3角形の面2個と4角形の面3個のものをタイプ2と呼ぶことにします．

パズル的な問題 2. 直径が1のタイプ1の5面体で体積が最大となるものを決めて下さい．

パズル的な問題 3. 直径が1の円柱で体積が最大になるものと表面積が最大になるものを決めて下さい．また，直径が1の円錐や円錐2つからなる回転体（3角形を1つの辺の周りに回転させたもの）でも同様の問題も考えてみて下さい．

これは，高校の微積分の範囲の手ごろな問題のように思えます．

修士論文になった問題 1. 直径が1のタイプ1の5面体で表面積や辺の総和が最大となるものを決めて下さい．

熊本大学の修士論文では，面対称の場合に限って表面積が最大となるものを決定することが出来ましたが，残念ながらその値は近似値でしか求めらえていません．また，面対称の仮定は外せるとは思いますが，今のところこれも未解決と言えそうです．

修士論文になった問題 2. 直径が1のタイプ2の5面体で体積や表面積や辺の総和が最大となるものを決めて下さい．

最大体積は 1/6 で正三角柱の場合と正三角錐台となる場合があり，そのような5面体には1パラメーター分の自由度があります．これはちょっと面白い事実のように思われます．正三角錐台と仮定して表面積と辺の長さの総和が最大となるものを決定することは出来ていますが，一般の場合には分かっていません．

未解決問題 1. 上記の問題で6面体以上の場合にも最大となる多面体を決定して下さい．

4角形6個からなる6面体に関して，直径が1で表面積，辺の総和とも直径が1の立方体より大きいものがあります．それは，底面が直径1で周の長さが最大となる4角形で，上面は底面に相似となるもので構成することが出来ます．立方体より大きいものが存在することは，興味深い事実です．

また，回転体の場合でも4角形以上の多角形をその1辺の周りに回転して出来る凸回転体で，直径が1という条件下で，その体積や表面積が最大となるものは直には分かりません．

未解決問題 1． 直径が1の凸体で体積，表面積ともに最大となるものは球であることを示して下さい．

これが，本当に知られていないかどうかは自信がありません．平面の場合は，定幅曲線の長さが幅だけで決まるので，等周不等式を用いることによって，円が最大となることが分かります．しかし，空間では定幅曲面に関してはほとんど何も分かっていないので，難しい問題かもしれません．

参考文献

[1] 松田典子, 多角形と多面体の等直径問題, 熊本大学大学院教育学研究科修士論文 (2008).

10．分解合同

パズル的な問題 1． 正三角形を切って重ならないように並べ替え，正方形または長方形を作るにはどのようにしたらよいでしょうか？

勿論，1辺が正三角形の辺とする長方形にするのは簡単ですが，正方形にするのは難しい問題です．4つに切って並べ替えることが出来，4つに切るのが最少個数であることは容易に分かります．

パズル的な問題 1． 正三角形を切って重ならないように並べ替えて，正5角形，正6角形を作るにはどのようにしたらよいでしょうか？また，正方形を切って重ならないように並べ替え，正5角形，正6角形，正7角形，正8角形を作るにはどのようにしたらよいでしょうか？

これらはおそらくパズルとしては非常に難しい問題ですが，どこまで，可能かどうか，更に，切り分ける個数が最小かどうかに関して興味があ

ります.

パズル的な問題 2. 1辺の長さが3の正三角形と4の正三角形を切って重ならないように並べ替え1辺の長さが5の正三角形を作るにはどのようにしたらよいですか？

一般に，1辺の長さが $(n+1)^2-n^2$ の正三角形と $2n(n+1)$ の正三角形を切って並べ替え1辺の長さが $(n+1)^2+n^2$ の正三角形を作るにはどのようにしたらよいですか？

一方の図形を有限個に切って重ならないように並べ替え，もう一方の図形に出来るとき，このような2つの図形を分解合同と言います.

論文になった問題 1. 面積が等しい2つの平面多角形は分解合同です.

これは，ボヤイ・ケルビンの定理として有名です．特に小学校で平行四辺形の面積を教えるときに切って並べ替えて長方形にして求めますが，一般にそのようなことが出来ることをこの定理が保証しているのです.

論文になった問題 2. 正四面体を切って組み替えて直方体に出来ません.

これは，1900年にHilbertの23の問題の3番目の問題としてとして出され，すぐにDehnによって解決されたことで有名です．平面のボヤイ・ケルビンの定理との違いに注目して下さい.

また，分解合同と似ていますが，有限個の部分集合に分解し，重ならないように組み替えたものどうしをジクソー同値と呼びましょう．このときは部分集合は有限個の連結成分から構成されるわけではないので，直に不思議なことが生じます.

論文になった問題 3. 空間内の球面は，同じ大きさの2つの球面とジクソー同値である.

これは，バナッハ・タルスキーのパラドックスとして有名です.

論文になった問題 3. 円と正方形はジュクソー同値でしょうか？

これも長い間，未解決の問題として有名でしたが，1989年にM. Laczkovichによって肯定的に解かれました.

未解決問題 平面上の面積が等しい n 角形と m 角形は分割合同であるが，何個に切り分ければ一方から他方へ並べ替えることが出来るか n, m を用いて上から評価して下さい.

修士論文で，非常に荒い評価をしたものはありますが ([2])，その最少

個数を議論した論文はほとんどないかもしれません.

未解決問題 球面上の２つの面積が等しい多角形は分割合同となるか？その場合は具体的な切り方と並べ替え方を示して下さい．また，負定曲率平面でも同様の問題を考察して下さい.

参考文献

[1] 中村和仁, 離散幾何における２つの結果–分解合同と横断的 Helly 数–, 熊本大学大学院教育学研究科修士論文 (2008).

[2] M. Dehn, *Über Zerlegung von Rechtecken in Rechtecke*, Math. Ann., **57** (1903), 314-332.

[3] G. Frederickson, *Dissections : Plane & Fancy*, Cambridge UP (1997).

[4] M. Laczkovich, *Equidicomposability and discrepancy : a solution of Tarski's circle-squaring problem*, J. Reine Angew. Math., **404** (1990), 77-117.

11. 多角形のビリヤード

ここでは三角形や多角形のビリヤード台があったとして，その台上での玉の軌跡について考察します．特に，方向も込めて元の状態に戻りその後は同じ動きを繰り返す軌道を周期軌道と言います．勿論，摩擦や玉の回転は考慮せず，玉は壁では完全弾性衝突するものとします.

パズル的な問題 1. 鋭角三角形のビリヤード台には，必ず３回壁にあたる周期軌道が存在することを示して下さい.

これは，Fagnano 軌道と呼ばれ，与えられた鋭角三角形の各辺上に３頂点を持つ三角形のうちで，辺の長さの総和が最小となる三角形として古くからよく知られている周期軌道です．また，その近くに必ず６回壁に当たる周期軌道があることも興味深い事実です．さらに，４角形でも順番に隣の辺に４回当たる周期軌道（Fagnano 軌道）がある時には，その４角形は円に内接することが容易に分かります.

パズル的な問題 2. 直角三角形には必ず周期起動があることを示して下さい.（斜辺に直交して出る軌道を探しなさい.）

パズル的な問題 3. 正方形ビリヤード台で，コーナーから玉を打つと

するとき，どの地点に対してもそこに行く軌道を4点だけでブロックすることが出来ることを示して下さい．

どの点に対してもこのような性質（任意の点に至る軌道を有限個の点のみでブロック出来る）は，secure と呼ばれ，secure でない多角形の例も知られています．

論文になった問題 1. 正多角形のビリヤードで secure となるのは正三角形，正方形と正6角形のみです．

一般の曲面で考えると，例えば，球面の場合は，どの点に対してもその対心点間での軌道は互いに交差することなく無限にあるので，secure でないことになります．また，平坦トーラスは secure で，ブロックする点の個数も8個でよいことが知られています．それ以外の曲面，更には次元の高い場合に具体的にどのような結果があるかは興味深い問題です．

論文になった問題 2. 直角三角形の斜辺以外の辺に直行して出るほとんど全て（測度論的意味において）のビリヤード軌道は周期軌道となります．

これは，Poincaré の Recurrence Theorem を用いて示されました．

更に，計算機を用いて鈍角が 100° を超えない鈍角三角形は周期軌道を持つことが示されています．また，鈍角三角形が周期軌道を持つための十分条件については，いろいろな結果が知られています．

未解決問題 1. すべての鈍角三角形はビリヤード周期軌道をもつでしょうか？また，4角形以上の多角形に対しても考察して下さい．

このような基本的な問題も今だに分かっていないという状態です．

正多角形 (3,4,6 以外) や球面は secure ではないことが分かっていますが ([2])，その概念を少し弱めて，与えられた長さ l 以下の軌道では，目的の点に至ることが出来ないように有限個の点でブロックすることが出来るとき l-secure と呼ぶことにしましょう．

未解決問題 2. l-secure に関して正多角形や各種の曲面に関してどのようになりますか？

参考文献

[1] B. Chipra, R. Hanson & A. Kolan, *Periodic trajectories in right*

triangle billiards, Phys. Rev. **E 52** (1995), 2066-2071.

[2] T. Monteil, *On the finite blocking property*, Ann. Inst. Fourier, Grenoble **55** (2005), 1195-1217.

[3] S. Tabachinikov, *Geometry and Billiards*, STML 30, 2005, AMS & MASS.

12. おわりに

ここでは，教育学研究科での研究として，幾何学関連のもののみを扱いましたが，位相幾何的な部分は入っていませんし，勿論，代数学や解析学等の他分野においても同様な観点から，教育学研究科にふさわしい数学の研究内容があるのではないかと思います．

最後に，教育学研究科において私の指導した修士論文のタイトルを掲載します．

「３点を連結するグラフの全曲率の研究」
「凸曲面における最遠点の研究 –中高数学科教材開発の試み– 」
「最短線における全曲率の研究 –中高数学科での教材開発の試み– 」
「Billiard in Polygon 」
「閉曲線の二重接線と二重法線の研究 」
「四頂点定理とその周辺 」
「空間曲線の大域的性質」
「多角形および多面体における等直径問題」
「離散幾何における２つの結果　～分解合同と横断的 Helly 数～ 」

このなかで，２番目から４番目までの３つは，修士論文の内容に関連した初等的で中学生にも理解可能な題材をもとに，附属中学校において２時間分の授業をしてもらい，その指導案を修士論文の付録として付けてもらいました．教育学研究科らしい修士論文のタイトルが，特に要求された７，８年ほど前にそのようにしたのですが，最近は，大学院生に時間的な余裕がなかったりで止めています．ただ，自分が研究した題材で授業をする経験を持つことは十分に意義があることとは思いますが，大学院生によっては非常勤講師として十分な実践経験を持っている場合もありますし，また，附属学校等で授業をすることにあまり興味を示さない場合もありますので，個々に対応すべきものであろうかと考えます．